Sujet 1 : Correction

3. Statique

1) Liaison réalisée entre le bâti **(1)** et l'arbre **(2)**

Les torseurs d'action mécaniques transmissibles en A et B sont les suivants :

$$T_{1/2}^{\mathrm{A}}:\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ A_y & 0 \\ A_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\mathrm{A};B)} \quad \text{et} \quad T_{1/2}^{\mathrm{B}}:\begin{Bmatrix} B_x & 0 \\ B_y & 0 \\ B_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\mathrm{B};B)}$$

Lors d'une sommation de liaison en parallèle, le torseur d'action mécanique transmissibles de la liaison équivalente est la somme des torseurs d'action mécanique transmissibles.

Le moment de $T_{1/2}^{\mathrm{A}}$ est transporté en A, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}{}_{(\mathrm{B},1/2)} &= \vec{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}{}_{(\mathrm{A},1/2)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}^{A}_{1/2} \\ &= \vec{0} - L_1 \cdot \vec{x} \wedge \left(A_y \cdot \vec{y} + A_z \cdot \vec{z}\right) \\ &= L_1 A_z \cdot \vec{y} - L_1 A_y \cdot \vec{z} \end{aligned} \qquad \text{soit : } T_{1/2}^{\mathrm{A}}:\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ A_y & L_1 A_z \\ A_z & -L_1 A_y \end{Bmatrix}_{(\mathrm{B};B)}$$

$$\text{On obtient donc : } T_{1/2}^{\mathrm{A}}:\begin{Bmatrix} B_x & 0 \\ A_y + B_y & L_1 A_z \\ A_z + B_z & -L_1 A_y \end{Bmatrix}_{(\mathrm{B};B)}$$

Le torseur obtenu est celui d'une liaison pivot d'axe $(\mathrm{B},\vec{x})$. Les torseurs d'action mécanique et cinématique sont donc:

$$T_{1/2}:\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\mathrm{B};B)} \quad \text{et} \quad V_{1/2}:\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\mathrm{B};B)}$$

Rem : La liaison pivot supprime 5 d.d.l., la liaison rotule 3 d.d.l. et la liaison linéaire annulaire 2 d.l.l. Le montage des deux liaisons est donc isostatique (5=3+2).

2) Coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans la base $B:(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Par projection sur $\vec{u}$ et $\vec{z}$ on obtient : $F_u = -F\sin\alpha$ et $F_z = -F\cos\alpha$.

La projection de $F_u \cdot \vec{u}$ sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ donne enfin :

$$\vec{F}:\left|\begin{aligned} F_x &= -F\sin\alpha\,\sin 45^\circ \\ F_y &= -F\sin\alpha\,\cos 45^\circ \\ F_z &= -F\cos\alpha \end{aligned}\right.$$

3) Inventaire des actions mécaniques appliquées à l'arbre **(2)**. Isolement le solide **(2)** et principe fondamental de la statique appliquer à **(2)**.

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

$$T_{1/2}^{A}:\begin{Bmatrix}0 & 0\\ A_y & L_1A_z\\ A_z & -L_1A_y\end{Bmatrix}_{(B;B)}\quad T_{1/2}^{B}:\begin{Bmatrix}B_x & 0\\ B_y & 0\\ B_z & 0\end{Bmatrix}_{(B;B)}\quad T_{ext/2}^{C}:\begin{Bmatrix}0 & C\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(B;B)}\quad T_{ext/2}^{D}:\begin{Bmatrix}F_x & 0\\ F_y & 0\\ F_z & 0\end{Bmatrix}_{(D;B)}$$

Il suffit de transporter le moment de $T_{ext/2}^{D}$ en B, soit :

$$\vec{M}^{D}_{(B,ext/2)} = \vec{M}^{D}_{(D,ext/2)} + \overrightarrow{BD}\wedge \vec{R}^{D}_{ext/2}$$
$$= \vec{0} + \left(L_2\cdot\vec{x} + R\cdot\vec{y}\right)\wedge\left(F_x\cdot\vec{x} + F_y\cdot\vec{y} + F_z\cdot\vec{z}\right)$$

soit : $T_{ext/2}^{D}:\begin{Bmatrix}F_x & RF_z\\ F_y & -L_2F_z\\ F_z & L_2F_y - RF_x\end{Bmatrix}_{(B;B)}$

Le principe fondamental permet d'écrire :

$$T_{1/2}^{A} + T_{1/2}^{B} + T_{ext/2}^{C} + T_{ext/2}^{D} = 0$$

Ce qui donne le système d'équations scalaires :

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\\(6)\end{array}\begin{cases}B_x + F_x = 0\\ A_y + B_y + F_y = 0\\ A_z + B_z + F_z = 0\\ C + RF_z = 0\\ L_1A_z - L_2F_z = 0\\ -L_1A_y + L_2F_y - RF_x = 0\end{cases}\qquad \text{avec : }\begin{array}{l}(7)\\(8)\\(9)\end{array}\begin{cases}F_x = -F\sin\alpha\,\sin 45°\\ F_y = -F\sin\alpha\,\cos 45°\\ F_z = -F\cos\alpha\end{cases}$$

4) .Calcul de F et des torseurs d'action mécanique.

$$\boldsymbol{F} = \frac{C}{R\cos\alpha}\qquad \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{F_y} = -\frac{C\,tg\alpha\,\sin 45°}{R}\qquad \boldsymbol{F_z} = -\frac{C}{R}$$

$$\boldsymbol{A_y} = \frac{C\,tg\alpha\sin 45°}{L_1R}(R - L_2)\qquad \boldsymbol{A_z} = -\frac{L_2C}{L_1R}$$

$$\boldsymbol{B_x} = \frac{C\,tg\alpha\,\sin 45°}{R}\qquad \boldsymbol{B_y} = \frac{C\,tg\alpha\sin 45°}{L_1R}(L_2 + L_1 - R)\qquad \boldsymbol{B_z} = C\frac{L_1 + L_2}{L_1R}$$

4 Cinématique

1) Calcul de $\vec{V}_{(B\in 2/1)}$

La pièce **(2)** est animée d'un mouvement de rotation de centre 0, le torseur distributeur des vitesses est le suivant :

$$V_{2/1}:\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}\cdot\vec{z} \\ \vec{V}_{(O\in 2/1)} = \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \text{on obtient donc : } \vec{V}_{(B\in 2/1)} = \vec{V}_{(O\in 2/1)} + \overrightarrow{BO}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}$$

$$= \vec{0} - (R+2r)\cdot\vec{u}\wedge\dot{\theta}\cdot\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{V}_{(B\in 2/1)} = (R+2r)\dot{\theta}\cdot\vec{v}}$$

2) Déduction de $\vec{V}_{(B\in 3/1)}$ et calcul de $\vec{\Omega}_{3/1}$

Il y a roulement sans glissement en B entre **(2)** et **(3)**, donc :

$$\vec{V}_{(B\in 3/2)} = \vec{0}, \quad \text{de plus, } \vec{V}_{(B\in 3/1)} = \vec{V}_{(B\in 3/2)} + \vec{V}_{(B\in 2/1)} = \vec{V}_{(B\in 2/1)}$$

$$= (R+2r)\dot{\theta}\cdot\vec{v}$$

Pour les mêmes raisons, on déduit : $\vec{V}_{(A\in 3/1)} = \vec{0}$, de plus $\vec{\Omega}_{3/1} = \omega_{3/1}\cdot\vec{z}$, car les pièces sont en mouvement plan. On obtient :

$$\vec{V}_{(B\in 3/1)} = \vec{V}_{(A\in 3/1)} + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}_{3/1} \qquad \text{soit : } (R+2r)\dot{\theta}\cdot\vec{v} = \vec{0} + (-2r)\cdot\vec{u}\wedge\omega_{3/1}\cdot\vec{z}$$

$$\text{or, } \vec{u}\wedge\vec{z} = -\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad (R+2r)\dot{\theta} = 2r\times\omega_{3/1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{3/1} = \frac{(R+2r)}{2r}\dot{\theta}}$$

3) Résultante et moment du torseur cinématique du mouvement de 3/1

$$V_{3/1}:\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{3/1} = \dfrac{(R+2r)}{2r}\dot{\theta}\cdot\vec{z} \\ \vec{V}_{(A\in 3/1)} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

4) Calcul de $\vec{V}_{(C\in 3/1)}$ et déduction de la relation entre α et θ.

$$\vec{V}_{(C\in 3/1)} = \vec{V}_{(A\in 3/1)} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = \vec{0} - r\vec{u} \wedge \frac{(R+2r)}{2r}\dot{\theta}\cdot\vec{z}$$

$$\underline{\vec{V}_{(C\in 3/1)} = \frac{(R+2r)}{2}\dot{\theta}\cdot\vec{v}}$$

de plus, le point C est fixe par rapport à **(3)**

$$\overrightarrow{OC} = (R+r)\cdot\vec{u} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_{(C\in 3/1)} = (R+r)\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\underline{\vec{V}_{(C\in 3/1)} = (R+r)\dot{\alpha}\cdot\vec{v}}$$

On en déduit alors la relation suivante :

$$\frac{(R+2r)}{2}\dot{\theta} = (R+r)\dot{\alpha}$$

Soit encore, en tenant compte des conditions initiales :

$$\boxed{\frac{(R+2r)}{2}\theta = (R+r)\alpha}$$

5) Calcul de $\frac{\omega_{2/4}}{\omega_{1/4}}$ et déduction $\dot{\alpha}$ en fonction de $\dot{\theta}$

On se place dans la base B_4

$$\frac{\omega_{2/4}}{\omega_{1/4}} = -\frac{R}{R+2r} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_{2/1}-\omega_{4/1}}{\omega_{1/1}-\omega_{4/1}} = -\frac{R}{R+2r} \quad \rightarrow \quad \omega_{2/1} = \left(1+\frac{R}{R+2r}\right)\omega_{4/1}$$

ce qui donne :

$$\dot{\theta} = \left(1+\frac{R}{R+2r}\right)\dot{\alpha}$$

soit encore :

$$\boxed{\frac{(R+2r)}{2}\dot{\theta} = (R+r)\dot{\alpha}}$$

5. *Cinétique*

i. ETUDE PLANE

1) Calcul de la matrice d'inertie d'un disque

Par raison de symétrie, la matrice d'inertie dans la base $B:(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de la figure 4 d'un disque calculée au centre C possède la structure suivante :

$$I_C:\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B \quad \text{avec : } A=\int_S y^2 dS \quad , \quad C=\int_S \left(x^2+y^2\right)\mu\, dS \quad \text{d'ou} \ , \ A=\frac{C}{2}$$

ou C est le centre du disque.

en passant en cordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{matrix} \quad \rightarrow \quad dS=\rho\, d\rho\, d\theta \quad \rightarrow \quad C=\int_0^r\int_0^{2\pi}\rho^3\mu\, d\theta\, d\rho=\frac{\pi r^4}{2}\mu \quad \text{et} \quad A=\frac{\pi r^4}{4}\mu$$

soit, en factorisant par la masse du disque :

$$m=S\mu=\mu\,\pi\, r^2 \quad \rightarrow \quad A=m\frac{r^2}{4} \quad \text{et} \quad C=m\frac{r^2}{2}$$

2) Matrice d'inertie de la bague intérieure et de la bague extérieure.

La bague intérieure a pour rayon intérieur *R-e* et pour rayon extérieur *R*. Ces moments d'inertie sont donc les suivants :

$$C=\pi\,\mu\,\frac{R^4-(R-e)^4}{2} \quad \text{et} \quad A=\pi\,\mu\,\frac{R^4-(R-e)^4}{4} \quad \text{avec : } M=\mu\,\pi\left(R^2-(R-e)^2\right)$$

On obtient alors :

$$C=M\frac{R^2+(R-e)^2}{2} \quad \text{et} \quad A=M\frac{R^2+(R-e)^2}{4}$$

De même, pour la bague extérieure on obtient :

$$C=M'\frac{(R+2r+e)^2+(R+2r)^2}{2} \quad \text{et} \quad A=M'\frac{(R+2r+e)^2+(R+2r)^2}{4}$$

$$\text{avec : } M'=\mu\,\pi\left((R+2r+e)^2-(R+2r)^2\right)$$

3) Torseur cinétique de la bague extérieure

O est le centre d'inertie de la bague extérieure du roulement.

$$C_{2/1}:\left\{\begin{aligned}\vec{R}_{(2/1)} &= M'\cdot\vec{V}_{(O\in 2/1)} = \vec{0}\\ \vec{\sigma}_{(O,2/1)} &= I_O\cdot\vec{\Omega}_{2/1} = M'\frac{(R+2r+e)^2+(R+2r)^2}{2}\dot{\theta}\cdot\vec{z}\end{aligned}\right\}$$

4) Calcul du torseur cinétique d'un rouleau (plan).

$$C_{3/1}:\left\{\begin{aligned} m\vec{V}_{(C\in 3/1)} &= m\dot{\theta}\,\frac{R+2r}{2}\cdot\vec{v}\\ \vec{\sigma}_{(C,3/1)} &= I_C\cdot\vec{\Omega}_{3/1} = m\dot{\theta}\,\frac{r(R+2r)}{4}\cdot\vec{z}\end{aligned}\right\}$$

5) Calcul du torseur cinétique du roulement (plan)

Le torseur cinétique du roulement est égale à la somme des torseurs cinétique des solides qui le compose. On pose $\vec{u}_i$ et $\vec{v}_i$ les vecteurs tournants associés à chaque bille, tel que le vecteur $\vec{u}_i$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC_i}$

$$C_{Rou/1} = C_{2/1} + \sum_{i=1}^{n} C_{3_i/1} \quad \text{avec} \quad C_{3_i/1}:\left\{\begin{aligned} & m\dot{\theta}\,\frac{R+2r}{2}\vec{v}_i\\ & \frac{m\dot{\theta}}{4}\big((R+2r)(2R+3r)\big)\cdot\vec{z}\end{aligned}\right\}$$

on obtient alors (dans le cas où n > 1) :

$$C_{Rou/1}:\left\{\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} m\dot{\theta}\frac{R+2r}{2}\vec{v}_i = \vec{0}\\ & \left[n\frac{m}{4}\big((R+2r)(2R+3r)\big) + M'\frac{(R+2r+e)^2+(R+2r)^2}{2}\right]\dot{\theta}\cdot\vec{z}\end{aligned}\right\}$$

ii. ETUDE VOLUMIQUE

1) Calcul de la matrice d'inertie d'une bille.

Pour des raisons de symétrie, la matrice d'inertie d'une bille possède la structure suivante.

$$I_C : \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_B \qquad \text{avec : } 3A = \int_S 2(x^2 + y^2 + z^2)\rho \, dV$$

en passant en coordonnées sphériques $(\lambda, \theta, \varphi)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos\varphi \cos\theta \\ y &= \lambda \cos\varphi \sin\theta \rightarrow dV = \lambda^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \rightarrow A = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \lambda^4 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{4}{5} r^5 \pi \rho \\ z &= \lambda \sin\varphi \end{aligned}$$

soit, en factorisant par la masse de la bille :

$$m = \frac{4\pi r^2}{3}\rho \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{2mr^2}{5}$$

en appliquant le théorème de Huyghens généralisé, on obtient :

$$I_A : \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A + mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & A + mr^2 \end{bmatrix}_{B_4}$$

2) Calcul du torseur cinétique du roulement à billes.

$$C_{Rou/1} : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} m\dot{\theta} \frac{R+2r}{2} \vec{v}_i = \vec{0} \\ \left[n\, m \left(\frac{2r^2}{5} + \frac{(R+r)(R+2r)}{2} \right) + M' \frac{(R+2r+e)^2 + (R+2r)^2}{2} \right] \dot{\theta} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$